函数与数列　学生版

模块一　数列与函数单调性

【例 1】已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1+a_2=b_1+b_2=30$，$a_3+a_4=b_3+b_4=10$，则数列 $\{a_nb_n\}$ 在 $n=$ _____ 时取到最小值.

【例 2】若数列 $\{a_n\}$，对于 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n+k}-a_n>kt$（t 为常数）成立，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(t)$. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n+1}-\lambda n^2+4n$，且具有性质 $P(4)$，则实数 λ 的取值范围是（　）

A. $\left(\dfrac{8}{5},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{8}{5}\right)$

【例 3】（2024 • 辽宁）已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，且 $a_n+\mathrm{e}^{a_{n+1}-a_n}=7$，则（　）

A．存在 a_1 使数列 $\{a_n\}$ 为常数列

B．存在 a_1 使数列 $\{a_n\}$ 为递增数列

C．存在 a_1 使数列 $\{a_n\}$ 为递减数列

D．存在 a_1 使得 $a_1\geqslant a_n$ 恒成立

模块二　指数、对数与数列

【例 4】已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^3$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）设 $b_n=\log_2 a_n$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式及其前 n 项和 B_n；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式，并求满足 $a_n>2^{100}$ 的最小正整数 n.

【例 5】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和 S_n；

（2）设 $b_n=\log_{\sqrt{3}}(a_n+2^{n-1})+1$，若不等式

$$15\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant k\sqrt{10n+15}$$

对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，求正数 k 的最大值.